Fractions rationnelles

Exercice 1

1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\frac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
6. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
7. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
8. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
9. Décomposer $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Exercice 3 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

Exercice 4 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

Fractions rationnelles

Indication 2 Attention il y a une partie entière, la fraction s'écrit

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

Indication 3 Il y a une partie entière qui vaut 2.

Fractions rationnelles

Correction 1

1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$.
2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}$.
3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$.
4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}$.
5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}$.
6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$.
7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$.
8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$.
9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}$.
10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} =$
$-\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$.
20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Correction 2 Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) : $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de Φ_1 :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Expliquer qu'on obtient alors A en multipliant les deux membres de (1) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (1) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($B = 4$). Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients A, B, C au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}}.$$

Correction 3 La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer. Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1 - 2x + x^2$:

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \qquad (2)$$

En divisant les deux membres de (2) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de $x-2$ par $x-1$: $x-2 = (x-1)-1$.

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x - a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x.

Correction 4 Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2+1}. \qquad (3)$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (3) par $x^2 + 1$, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par $x^2 + 1$, calculer D et E... (le faire faire quand même à titre d'entraînement).

On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$. Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 *doit* se simplifier par x. On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par $x^2 + 1$, puis du quotient obtenu par $x^2 + 1$.

$$\frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2+1)^3} = \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de $\Phi - \frac{A}{x}$).